21/3/16

$$-\max(-2x_1+3x_2+4x_3)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4 &= 30 \\ 2x_1+x_2+3x_3 -x_5 &= 60 \\ x_1-x_2+2x_3 &= 20 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4 &= 30 \\ 2x_1+x_2+3x_3-x_5+x_6 &= 60 \\ x_1-x_2+2x_3+x_7 &= 20 \end{aligned}$$

2 Μέθοδοι

1) Μ-μέθοδος

2) Μέθοδος των 2 φάσεων

1) $-\max(-2x_1+3x_2+4x_3-Mx_6-Mx_7)$ $M \gg 0$ (M πολύ μεγάλο)
Εφαρμόζουμε τα βήματα του αλγορίθμου (Simplex) και λύνουμε το πρόβλημα.

			-2	3	4	0	0	-M	-M		
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	θ	
P_4	0	30	1	1	1	1	0	0	0	30/1	γ_1
P_6	-M	60	2	1	3	0	-1	1	0	60/3	γ_2
P_7	-M	20	-1	-1	2	0	0	0	1	20/2	γ_3
	z	0	2	-3	-4	0	0	0	0		γ_4

B	c_B	b -80M -3M	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6		
P_4	0	20	1/2	3/2	0	1	0	0	40/3	$\gamma_1' = \gamma_1 - \gamma_3'$
P_6	-M	30	1/2	5/2	0	0	-1	1	60/5	
P_3	4	10	1/2	-1/2	1	0	0	0		$\gamma_3' = \gamma_3/2$
	z	40	4	-5	0	0	0	0		

B	c_B	b -30M	P_1 -M/2	P_2 -5M/2	P_3	P_4	P_5	
P_4	0	2	1/5	0	0	1	3/5	10/3
P_2	3	12	1/5	1	0	0	-2/5	-
P_3	4	16	3/5	0	1	0	1/5	-
	z	100	5	0	0	0	-2	

P_5	0	10/3	1/3	0	0	5/3	1
P_2	3	40/3	1/3	1	0	2/3	0
P_3	4	50/3	2/3	0	1	1/3	0
	z	320/3		0	0	10/3	0

τιμή αντικειμενικής συνάρτησης

Λύση: $x_2 = 40/3$

$x_3 = 50/3$

2) $\min(x_6 + x_7) = -\max(-x_6 - x_7)$

κάνω από τις ίδιες περιορισμούς

I			0	0	0	0	0	-1	-1	
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	θ
P_4	0	30	1	1	1	1	0	0	0	30/1
P_6	-1	60	2	1	3	0	-1	1	0	60/3
P_7	-1	20	1	-1	2	0	0	0	1	20/2
		-80	-3	0	-5	0	1	0	0	

Πρόβλημα

Εταιρεία BEST (βιβλίο)

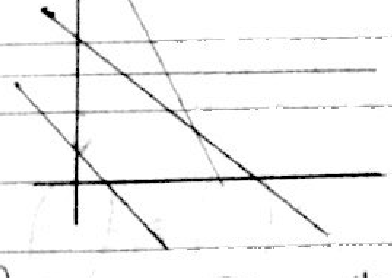
$$\max \ z = 50x_1 + 40x_2$$
$$3x_1 + 5x_2 \le 150$$
$$x_2 \le 20$$
$$8x_1 + 5x_2 \le 300$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

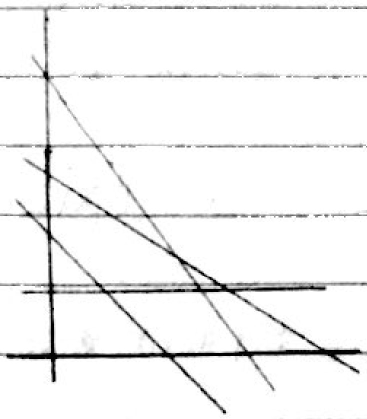
Λύση

i) Άριστη λύση Γ(30,12)

τιμή αντικειμενικής συνάρτησης 50

Γραφικά:





ii) $\max \ z = 50x_1 + 40x_2$
$$3x_1 + 5x_2 \le 150$$
$$x_2 \le 20$$
$$3x_1 + 5x_2 \le 300$$
$$x_1 + x_2 \ge 25 , \ x_1, x_2 \ge 0$$

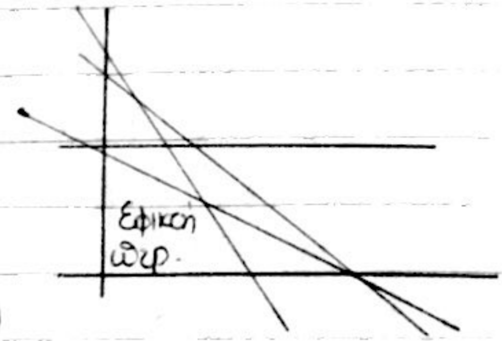
iii) $\max(50x_1 + 40x_2 - Mx_7)$

$$3x_1 + 5x_2 + x_3 = 150$$
$$x_2 \quad + x_4 = 20$$
$$8x_1 + 5x_2 \quad + x_5 = 300$$
$$x_1 + x_2 \quad - x_6 + x_7 = 20$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, 7$$

Μέθοδος Μ
4 ταμπλό

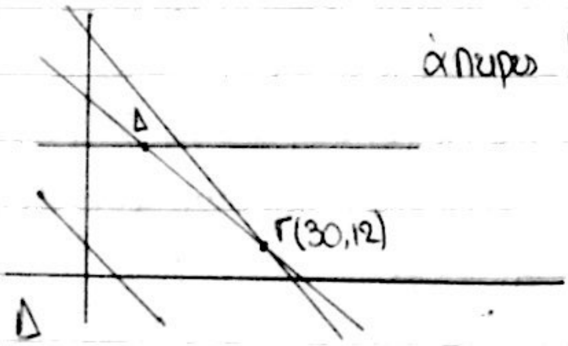
Λύση $x_2 = 12$
$x_4 = 8$
x
x

iv) $3x_1 + 5x_2 \leq 150$
$x_2 \leq 20$
$8x_1 + 5x_2 \leq 300$
$x_1 + x_2 \geq 50$
$x_1, x_2 \geq 0$
(αδύνατο, 4ος περιορ.)



v) $3x_1 + 5x_2 \leq 150$
$x_2 \leq 20$
$8x_1 + 5x_2 \geq 300$
$x_1, x_2 \geq 0$

άπειρες λύσεις



Έχουμε 2 λύσεις τη Γ και Δ
παίρνουμε τελικά τον κυρτό τους συνδυασμό

SOS ⇒ να βρείτε τη λύση (B) ⇒ $B^{-1} \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$
αντικ. συναρτ. φ_j
και συμπληρώστε το ταμπλό Simplex.

Θέμα Υποθέστε ότι σ' ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης προκύπτει το tableaux

β	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
B	4	A_1	1	0	A_3	0
2	-1	-5	0	1	-1	0
3	A_3	-3	0	0	-4	1
10	c_1	c_2	0	0	0	0

Ποιές συνθήκες έτσι ώστε:
i) η λύση είναι άριστη, αλλά υπάρχουν κι άλλες άριστες,
ii) η λύση δεν είναι μια βελ. (B<0)
iii) η λύση είναι μια βελ. εφικ. αλλά το λύση είναι μη φραγμένη,

Χαρακτηριστικά tableaux (SOS)

B	c_B	β	$\overset{1}{P_1}$	$\overset{2}{P_2}$	$\overset{3}{P_3}$	$\overset{4}{P_4}$	
P_2	2	10	2	1	1	0	
P_4		20	0	0	3	1	
		20-20M	3	0	-1+3M	0	> 0

			-1	3	0	0	
B	c_B	β	P_1	P_2	P_3	P_4	
P_3	0	0	2	1	1	0	(ενδιάμεσο)
P_4	0	5	1	2	0	1	
			1	-3	0	0	

			8	-3	-2	6	
B	c_B	β	P_1	P_2	P_3	P_4	
P_3	-2	5	-3	0	1	2	υπάρχει καλύτερη λύση
P_2	-3	10	0	1	0	-2	
		-40	-2	0	0	-4	

			3	1	4	8
B	c_B	β	P_1	P_2	P_3	P_4
P_1	3	2	1	0	1	2
P_2	1	1	0	1	1	3
		7	0	0	0	1

τέλειο
β.σ.λ
εναλλακτική άριστη λύση

			7	5	9	8
B	c_B	β	P_1	P_2	P_3	P_4
		0	0	2	4	1
		9	1	3	7	0
		63	0	32	72	0

άριστη λύση
και εκφυλισμένη

Τυπική μορφή

$$\max \underline{c}\,\underline{x}$$
$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$x b \geq 0$$

Ένα πρόβλημα (π.γ.π) είναι σε κανονική μορφή:
i) είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης
ii) όλοι οι περιορισμοί είναι ανισώσεις με φορά $\leq$
iii) όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές

$$\max c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$
$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$
$$\dots$$
$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$\max \underline{c}'\underline{x}$$
$$A\underline{x} \leq b$$
$$\underline{x} \geq 0$$

Άσκηση

$$\min 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$$
$$7x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 6$$
$$2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \geq 5$$
$$x_1 - x_2 = 10$$
$$x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0$$

να γίνει σε κανονική μορφή

Λύση

$$-\max\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3$$
$$7x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 6$$
$$-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq -5$$
$$x_1 - x_2 = 10$$
$$x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0$$

$$-\max\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3$$
$$7x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 6$$
$$-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 5$$
$$x_1 - x_2 \leq 10$$
$$x_1 - x_2 \geq 10$$
$$x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0$$

$$-\max\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3$$
$$7x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 6$$
$$-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq -5$$
$$x_1 - x_2 \leq 10$$
$$-x_1 + x_2 \leq -10$$

$$-\max\ -2(x_1' - x_1'') - 3x_2 - 5x_3'$$
$$7(x_1' - x_1'') - 4x_2 - x_3' \leq 6$$
$$-2(x_1' - x_1'') + 3x_2 - 4x_3' \leq -5$$
$$x_1' - x_1'' - x_2 \leq 10$$
$$-x_1' + x_1'' + x_2 \leq -10$$
$$x_1', x_1'', x_2, x_3' \geq 0$$

Δυϊκό πρόβλημα

Έστω το πρόβλημα στη μορφή (Π) $\max c'x$ $\left.\begin{matrix} \\ Ax \leq b \end{matrix}\right\}$ πρόβλημα ορίζω δυϊκό του προβλήματος (Π) το

$$\min \underline{b}'\underline{\omega}$$
$$A^T\underline{\omega} \geq c$$
$$\underline{\omega} \geq 0$$

ή διαφορετικά

$$\min b_1\omega_1 + \ldots + b_m\omega_m$$
$$a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2 + \ldots + a_{m1}\omega_m \geq c_1$$
$$a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2 + \ldots + a_{m2}\omega_m \geq c_2$$
$$- - - - - -$$
$$a_{1n}\omega_1 + a_{2n}\omega_2 + \ldots$$
$$\omega_i \geq 0$$

Άσκηση

$$\max 10x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 6x_4$$

(Π)

$$\omega_1 \quad 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 70$$
$$\omega_2 \quad 5x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 60$$
$$\omega_3 \quad 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 25$$

να βρείτε το (Δ)

Λύση

(Δ)

$$\min 70\omega_1 + 60\omega_2 + 25\omega_3$$
$$3\omega_1 + 5\omega_2 + 5\omega_3 \geq 10$$
$$2\omega_1 + 5\omega_2 + 6\omega_3 \geq 9$$
$$4\omega_1 + \omega_2 + 3\omega_3 \geq 4$$
$$2\omega_1 + 3\omega_2 + \omega_3 \geq 6$$
$$\omega_1, \omega_2, \omega_3 \geq 0$$

Πρόταση

Το δυϊκό του δυϊκού είναι το πρωτεύον.

Απόδειξη

$$\min \underline{b}'\omega \quad A\omega \geq c \quad \omega \geq 0 \Rightarrow (-A^T)\omega \leq -c \quad \underline{\omega} \geq 0 \overset{(\Delta)}{\Rightarrow} -\min -c'x \quad (-A^T)^T x \geq -b \quad \underline{x} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max c'x$$
$$A\underline{x} \leq b$$
$$\underline{x} \geq 0$$

Άσκηση

$\max\ 2x_1 + x_2$

$x_1 + x_3 = 2$

$2x_1 + x_2 \geq 3$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \in \mathbb{R}$

Λύση

Κάνω στην κανονική μορφή:

$\max\ 2x_1 + x_2$

$x_1 + x_2 \leq 2$

$-x_1 - x_2 \leq -2$

$-2x_1 + x_2 \leq -3$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \in \mathbb{R}$

$\max\ 2x_1 + x_2 - x_2''$

$$\left.\begin{array}{ll} w_1 & x_1 + x_2' - x_2'' \leq 2 \\ w_2 & -x_1 - x_2 + x_2'' \leq -2 \\ w_3 & -2x_1 + x_2' - x_2'' \leq -3 \end{array}\right\} \text{(Π) πρωτεύον}$$

$w_4 \quad x_1 - x_2' + x_2'' \leq 1$

$x_1, x_2', x_2'' \geq 0$

$\min\ 2w_1 - 2w_2 - 3w_3 + w_4$

$$\left.\begin{array}{l} w_1 - w_2 - 2w_3 + w_4 \geq 2 \\ w_1 - w_2 + w_3 - w_4 \geq 1 \\ -w_1 + w_2 - w_3 + w_4 \geq -1 \\ w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0 \end{array}\right\}$$

(Δ) Δυϊκό

παρατηρώ ότι υπάρχει παντού $w_1 - w_2$

οπότε $w = w_1 - w_2$

$$\min\ 2w_1' - 3w_3 + w_4$$
$$w_1' - 2w_3 + w_4 \geq 2$$
$$w_1' + w_3 - w_4 \geq 1$$
$$-w_1' - w_3 + w_4 \geq -1$$
$$w_1' \in \mathbb{R},\ w_3, w_4 \geq 0$$

άρα

$$\min\ 2w_1' - 3w_3 + w_4$$
$$w_1' - 2w_3 + w_4 \geq 2$$
$$w_1 + w_3 - w_4 = 1$$
$$w_1' \in \mathbb{R},\ w_3, w_4 \geq 0$$

$w_3' = -w_3$ όπότε

$$(\Delta)\quad \begin{cases} \min\ 2w_1 + 3w_3' + w_4 \\ w_1' + 2w_3' + w_4 \geq 2 \\ w_1 - w_3' - w_4 = 1 \\ w_1' \in \mathbb{R},\ w_3' \leq 0,\ w_4 \geq 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$ το γράφω έτσι

$$\min\ 2w_1 + 3w_2 + w_3$$
$$w_1 + 2w_2 + w_3 \geq 2$$
$$w_1 - w_2 - w_3 = 1$$
$$w_1 \in \mathbb{R},\ w_2 \leq 0,\ w_3 \geq 0$$

από ήταν το πρωτεύον

$$\max\ 2x_1 + x_2$$
$$(\Pi)\quad \begin{cases} w_1 & x_1 + x_2 = 2 \\ w_2 & 2x_1 - x_2 \geq 3 \\ w_3 & x_1 - x_2 \leq 1 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \in \mathbb{R}$$

<u>Κανόνες</u>

(Π) πρωτεύον		(Δ) δυϊκό
max		min
i-περιορισμός $\leq$	$\Longleftrightarrow$	i-μεταβλητή $w_i \geq 0$
i-περιορισμός $=$		$w_i \in \mathbb{R}$
i-περιορισμός $\geq$		$w_i \leq 0$
$x_i \geq 0$		i-περιορισμός $\geq$
$x_i \in \mathbb{R}$		i-περιορισμός $=$
$x_i \leq 0$		i-περιορισμός $\leq$

Άσκηση min ⇒ Άσκηση

max $2x_1 + 3x_2 + x_3$

w_1 $x_1 + 2x_2 \leq 3$

(Π) w_2 $2x_1 + 4x_2 - x_3 \geq 1$ Να υπολογίσετε

w_3 $x_1 + x_3 = 2$ το δυϊκό

$x_1 \leq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \in \mathbb{R}$

Λύση

min $3w_1 + w_2 + 2w_3$

$w_1 + 2w_2 + w_3 \leq 2$ $w_1 \geq 0$

$2w_1 + 4w_2 \geq 3$ $w_2 \leq 0$

$-w_2 + w_3 = 1$ $w_3 \in \mathbb{R}$

(Π) max $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$

$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$

— — — — — — —

$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn} \leq b_m$

(Δ) min $\sum b_i w_i$

$a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m \geq c_1$

$a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m \geq c_2$

— — — — — — — —

$a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m \geq c_n$

max $\sum_{j=1}^{n} \frac{\text{αξία}}{\text{προϊόντος}}$ προϊόντος = αξία

$\sum_{i=1}^{n} \frac{\text{ώρες } i}{\text{προϊόν } j}$ προϊόν j ≤ ώρες i

$\sum_{m} \text{βάρος}_i w_i$

$\sum_{i=1} \frac{\text{βάρος}_i}{\text{προϊόν}_i} w_i \geq \frac{\text{αξία}}{\text{βάρος}_i} w_i = \frac{\text{αξία}}{\text{βάρος}_i}$